Шифр: В-13

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ СОШ №8

Класс 10

ФИО Павлов Илья Игоревич

Чистовик

В-13

1	2	3	4	5	Σ
7 5	0	0	X	X	5 7

1) Необходимо узнать максимально возможное количество рыцарей, поэтому сначала предположим, что все люди - рыцари.

>1 >2 >3 >4 >5 >6 >7 >8 >9 >10

Тогда первые десять высказываний верны.

Однако, среди следующих высказываний есть фраза „Моё число меньше 1". Этого не может быть, если все сказали правду, следовательно среди говоривших есть минимум 1 лжец.

Рассмотрим продолжение ситуации. Если рыцарей 9, то каждый из них мог загадать нецелое число в случае, если сказавший „моё число больше 1" скажет „моё число меньше 2" и так далее.

>1 >2 >3 >4 >5 >6 >7 >8 >9 >10

<2 <3 <4 <5 <6 <7 <8 <9 <10 <1.

Тогда заведомо ложную фразу „моё число меньше 1" скажет 10-й человек, говоривший, что его число больше 10. В этом случае он соврет в обоих случаях, т.к. число может быть меньше 10 и больше 1

Таким образом, среди этих 10 человек могло быть 9 рыцарей.

Ответ: 9 рыцарей.

3) Т.к. сумма двух чисел в каждом столбце должна быть рациональным числом, иррациональных чисел в таблице быть ~~~~ не может.

При сложении двух иррациональных чисел, так же как и при сложении рационального с иррациональным, всегда получается иррациональное число.

Ответ: 0 иррациональных чисел.

1

2) Чтобы доказать, что четырёхугольник является ромбом, нужно доказать, что все его стороны равны.
Пусть стороны равны a, b, c и d, тогда из условия имеем:

$$(b+c+d) \vdots a$$
$$(a+c+d) \vdots b$$
$$(a+b+d) \vdots c$$
$$(a+b+c) \vdots d.$$

Но если $(b+c+d) \vdots a$, то и $(b+c+d+a) \vdots a$, аналогично для b, c и d.
То есть периметр 4-х-угольника делится на a, b, c и d.
Имеем: $P = a+b+c+d = 10^{100}$;

$P \vdots a, b, c, d$.

Докажем, что это возможно только при $a=b=c=d$.
Рассмотрим четырёхугольник с периметром не 10^{100}, а 10^{2} с теми же условиями.

$a+b+c+d = 10^{2}$ (*); $10^{2} \vdots a, b, c, d$.

10^{2} делится на 50, 25, 20, 10, 5, 1, 100.
В выпуклом 4-х-угольнике сумма длин любых 3-х сторон меньше длины четвёртой, поэтому очевидно, что единственный подходящий вариант в (*) $a=b=c=d=25$.
Аналогично рассуждаем и для $P=10^{100}$. Значит, единственно возможный вариант такой: $a=b=c=d=2{,}5\cdot10^{99}$.
Следовательно, 4-х-угольник является ромбом, ч.т.д.

5)

(7)

6	7	8	9	10	Σ
7	7	4	X	X	18

6) Т.к. числа больше 100, обозначим первое как $(100+n)$. Следовательно, остальные числа - $(n+101)$, $(n+102)$, $(n+103)$.

Сложим первое, второе и третье:

$$(100+n)+(101+n)+(102+n) = 303+3n = 3(n+101)$$

Теперь сложим второе, третье и четвёртое:

$$(101+n)+(102+n)+(103+n) = 306+3n = 3(n+102)$$

Суммы $3(n+101)$ и $3(n+102)$ представимы в виде произведения 3-х различных натуральных чисел, если $(n+101)$ ~~или~~ и $(n+102)$ не являются простыми числами. Т.к. два простых числа, ~~не~~ больших 100, не могут иметь разность 1, ~~одну~~ одну из сумм точно получится разложить на множители, то есть одно из чисел $(n+101)$ и $(n+102)$ точно не простое.

Значит, из 4-х чисел 3 обязательно дадут сумму, раскладываемую на 3 множителя. Ч.т.д.

7) $b > a > 1$

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$$

Рассмотрим член последовательности x_{n+1}, следующий за произвольным x_n

$$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$$

Разделим x_{n+1} на x_n:

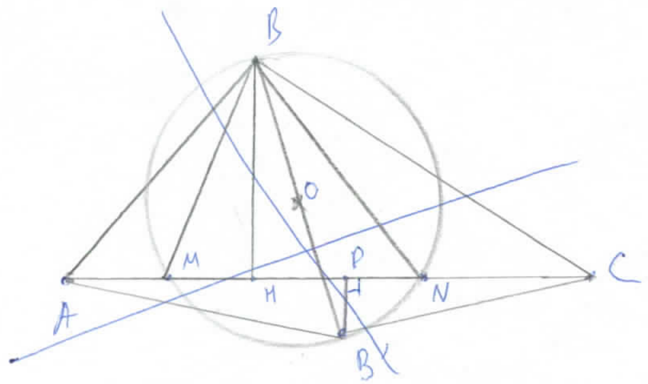
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)} = \frac{2^{n+1-n}\cdot\cancel{\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)}$$

Т.к. $b > a > 1$, то $\sqrt[2^{n+1}]{b} > \sqrt[2^{n+1}]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2$

Следовательно $\frac{2}{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}} < 1$; $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow$ последовательность убывает, ч.т.д.

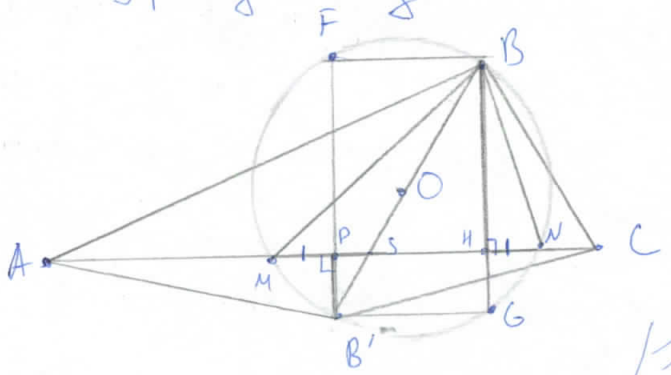
3)



Д-ть:

$AB' = CB'$

~~Проведём из точки B' высоту B'P к стороне AC.~~



Проведём к стороне AC высоту B'P, достроим прямоугольник FBGB'. ~~Из него видно, что MP=NH, т.к. т.O находится в его центре~~. FBGB' - вписанный, FB ∥ AC, т.к. B'P и BH ⊥ AC. Значит, $MP = NH$.

$MP = NH$

$MP + PH = NH + PH$

$MH = PH + NH$

$MH - NH = PH$.

Т.к. M и N - середины AH и CH соответственно, имеем:

$2(MH - NH) = 2PH$

$\cancel{2A}$ $AH - CH = 2PH$.

$AH - PH = CH + PH \Rightarrow AP = CP$.

Т.к. $PB' \perp AC$, и доказано, что $AP = CP$, точка B' лежит на серединном перпендикуляре к AC и равноудалена от его концов, то есть $AB' = CB'$ ч.т.д.